Work and Energy

พิจารณา สมการ Newton's Second Law

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

จากนิยาม ความเร่ง

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\vec{s}}{\vec{v}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{d\vec{s}/\vec{v}}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}\,d\vec{v}}{d\vec{s}}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{m\,\vec{v}.d\vec{v}}{d\vec{s}}$$

$$\sum \vec{F}.d\vec{s} = m\vec{v}.d\vec{v} = mvdv$$

$$\sum \vec{F}.d\vec{s} = mvdv$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \sum \vec{F}.d\vec{s} = \int_{v_1}^{v_2} mvdv \quad ; \quad m = \text{ค่าคงที่}$$

$$= m\frac{v^2}{2}\Big|_{v_1}^{v_2}$$

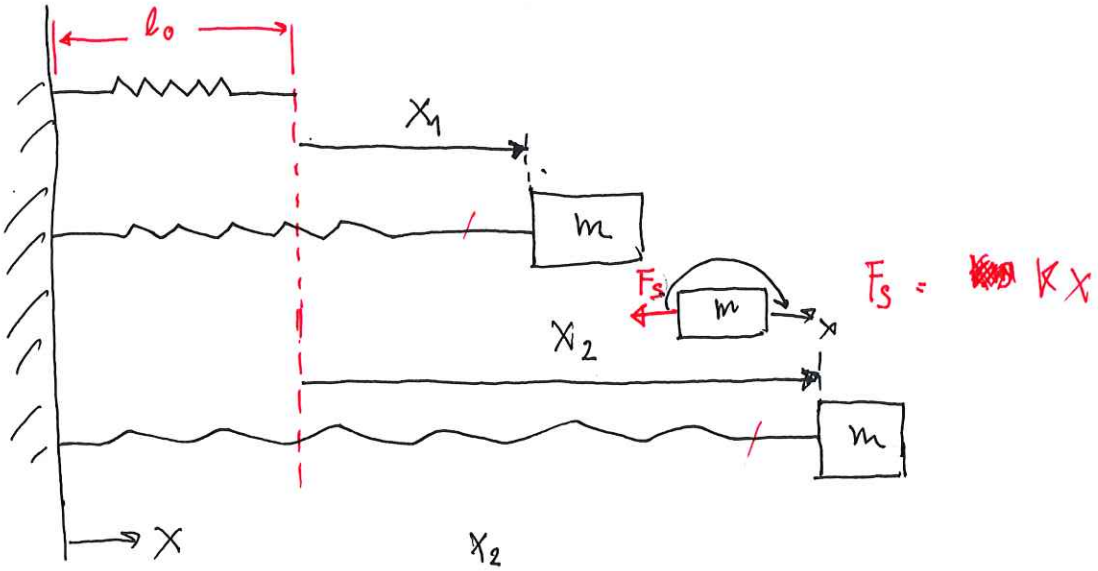
$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

เรียกเทอม $\frac{1}{2}mv^2$ ว่า พลังงานจลน์ (kinetic energy)

เรียกเทอม $\int_{s_1}^{s_2} \sum \vec{F}.d\vec{s}$ ว่า งาน (Work)

3. งานจากสปริง

l_0 = ระยะไม่ยืด/หดของสปริง



$$\int \Sigma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_s \cdot d\vec{x}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} -k\vec{x} \cdot d\vec{x} \qquad ; k = \text{ค่าคงที่ของสปริง}$$

$$= -k \int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$U_{1\to 2} = \frac{1}{2}k\left[x_1^2 - x_2^2\right]$$

หน่วยของงานและพลังงาน คือ Joule (J)

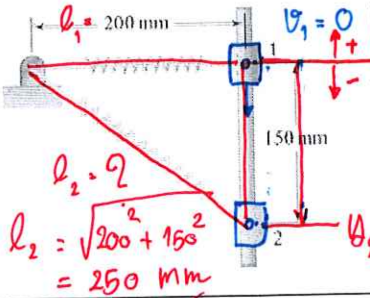
$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

T = พลังงานจลน์ $= \frac{1}{2}mv^2$

$U_{1\to 2}$ = งานของแรงจาก 1 ไป 2 $\begin{cases} F\cos\theta\,\Delta x \\ mg[y_1 - y_2] \\ \frac{1}{2}k[x_1^2 - x_2^2] \end{cases}$

Particle ⇒ collar

$U_{1\to 2}$ < แรงคงตัว ✗ / น้ำหนัก ✓ / สปริง ✓



PROBLEM 13.58

A 10-kg collar slides without friction along a vertical rod as shown. The spring attached to the collar has an undeformed length of 100 mm and a constant of 600 N/m. If the collar is released from rest in position 1, determine its velocity after it has moved 150 mm to position 2.

หา v_2

Answer v_2 = 1.481 m/s↓.

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = 0$$

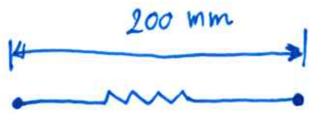
$$T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \times 10\, v_2^2 = 5 v_2^2$$

หา งาน

$$[U_{1\to 2}]_{\text{สปริง}} = \frac{1}{2} K [x_1^2 - x_2^2]$$

$$= \frac{1}{2} \times 600 \times [0.1^2 - 0.15^2]$$

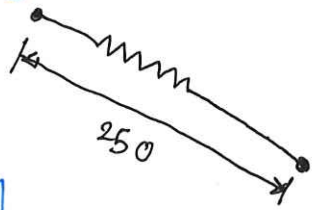
$$= -3.75 \text{ J}$$



l_0

$x_1 = 200 - (100)$

$x_1 = 100$ mm



$x_2 = 250 - 100$

$= 150$ mm

$$[U_{1\to 2}]_{\text{น้ำหนัก}} = mg\,[y_1 - y_2]$$

$$= 10 \times 9.81 \times [0 - (-0.15)]$$

$y_1 = 0$

$y_2 = -150$ mm

$$= 14.715 \text{ J}$$

แทนค่า ลงในสมการ ความสัมพันธ์ ระหว่าง งาน และพลังงาน

$$0 - 3.75 + 14.715 = 5 v_2^2$$

$$v_2 = 1.48 \text{ m/s}$$ ⋕

$U_{1\to2}$ — แรงอนุรักษ์ ✓ น้ำหนัก ✓ สปริง ✗

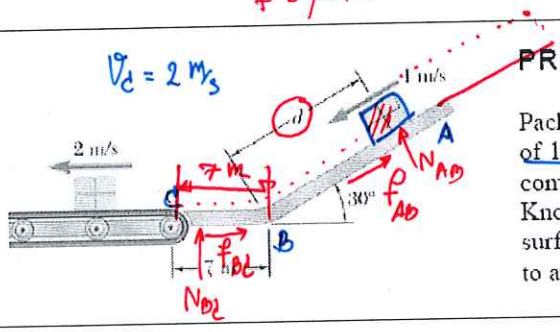
Chapter 13: Kinetics of particles

Work & Energy

$f = \mu N$

Particle ⇒ Package

PROBLEM 13.11 $v_A = v_1 = 1$ m/s



Packages are thrown down an incline at A with a velocity of 1 m/s. The packages slide along the surface ABC to a conveyor belt which moves with a velocity of 2 m/s. Knowing that $\mu_k = 0.25$ between the packages and the surface ABC, determine the distance d if the packages are to arrive at C with a velocity of 2 m/s.

หา d

$T_1 + U_{1\to2} = T_2$

Answer $d = 6.71$ m.

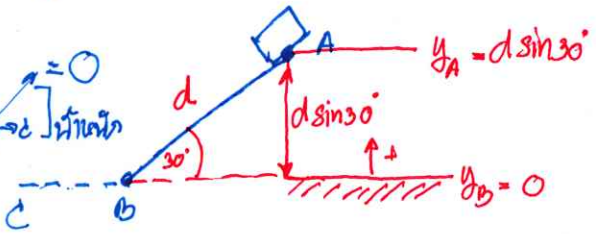
พิจารณาการเคลื่อนที่ของ Package จาก A ไป C

$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m (1)^2 = \frac{1}{2} m$

$T_C = \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} m (2)^2 = 2m$

หาก

$[U_{A\to C}]_{\text{น้ำหนัก}} = [U_{A\to B}]_{\text{น้ำหนัก}} + [U_{B\to C}]_{\text{น้ำหนัก}}$ (=0)



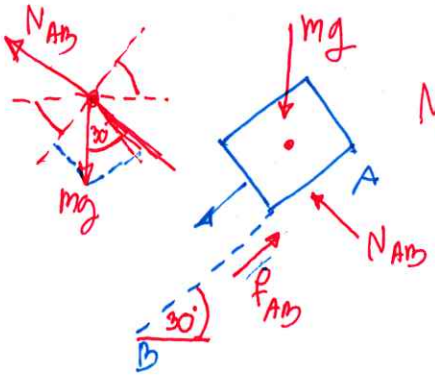
$= mg[y_A - y_B]$

$= m \times 9.81 \times [d\sin30° - 0]$

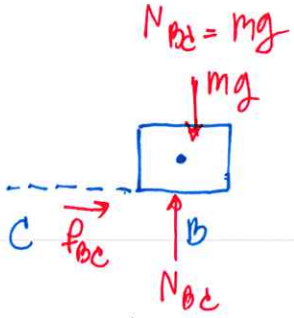
$= 4.905\, d\, m$

$[U_{A\to C}]_{\text{แรงอนุรักษ์}} = [U_{A\to B}]_{\text{แรงเสียดทาน}} + [U_{B\to C}]_{\text{แรงเสียดทาน}}$

(แรงเสียดทาน)



$N_{AB} = mg\cos30°$



AB

BC

$[U_{A\to B}]_{\text{แรงเสียดทาน}} = -f_{AB}\, d$

$= -\mu N_{AB}\, d$

$= -0.25 \times m \times 9.81 \times \cos30° \times d$

$= -2.12\, m\, d$

$[U_{B\to C}]_{\text{แรงเสียดทาน}} = -f_{BC} \times 7$

$= -\mu N_{BC} \times 7$

$= -0.25 \times m \times 9.81 \times 7$

$[U_{w \to c}]$ แรงเสียดทาน $= -17.17\ m$

จาก

$$T_A + U_{A \to C} = T_C$$

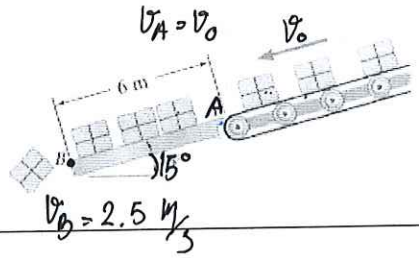
$$\frac{1}{2}m + 4.905\,dm - 2.12\,dm - 17.17m = 2m$$

$$\frac{1}{2} + 4.905\,d - 2.12\,d - 17.17 = 2$$

$$d = \underline{6.70} \quad m \ \#$$

Particle ⇒ Box

$U_{1\to2}$ — แรงภายนอก ✓ น้ำหนัก ✓ สปริง ✗



PROBLEM 13.13

Boxes are transported by a conveyor belt with a velocity v_0 to a fixed incline at A, where they slide and eventually fall off at B. Knowing that $\mu_k = 0.40$, determine the velocity of the conveyor belt if the boxes leave the incline at B with a velocity of 2.5 m/s.

หา v_0

Answer $v_0 = 4.61$ m/s ⩥15°.

พิจารณา การเคลื่อนที่ ของ Box จาก A ⇒ B

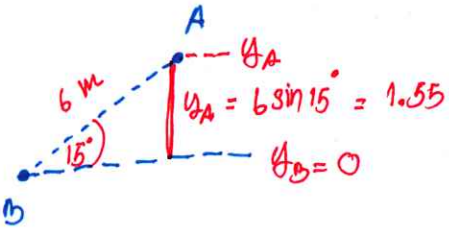
$$T_A + U_{A\to B} = T_B$$

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m (2.5)^2 = 3.125\, m$$

งาน

$$[U_{A\to B}]_{\text{น้ำหนัก}} = mg[y_1 - y_2] \quad (y_A - y_B)$$



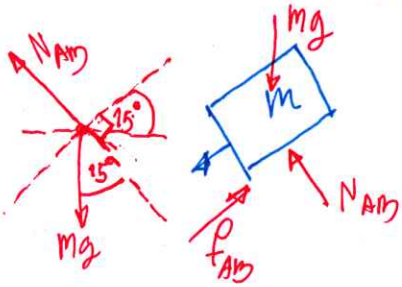
$$= m \times 9.81 \times [1.55 - 0]$$

$$= 15.21\, m$$

$$[U_{A\to B}]_{\text{แรงเสียดทาน}} = -f_{AB} \times 6 = -\mu N_{AB} \times 6$$

$$= -0.4 \times m \times 9.81 \times \cos 15° \times 6$$

$$= -22.74\, m$$



$f_{AB} = \mu N_{AB}$

$N_{AB} = mg\cos 15°$

จาก $T_A + U_{A\to B} = T_B$

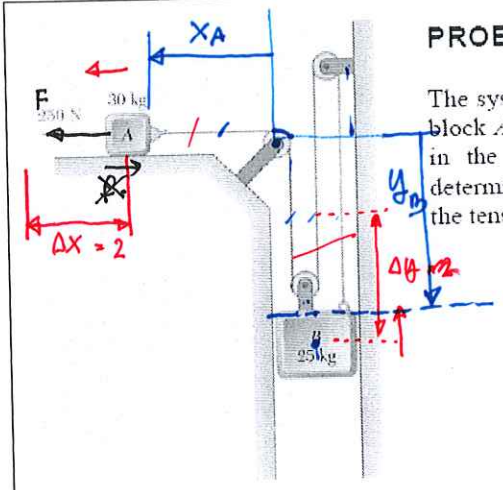
$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 15.21\, m - 22.74\, m = 3.125\, m$$

$$v_0 = \underline{4.616} \text{ m/s} \quad \#$$

$F = 250$ N

$v_{A,1} = v_{B,1} = 0$

Particle $\angle$ Block A / Block B



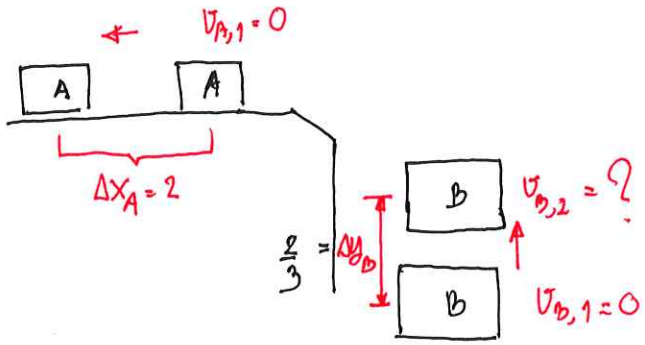
PROBLEM 13.22

The system shown is at rest when a constant 250-N force is applied to block A. Neglecting the masses of the pulleys and the effect of friction in the pulleys and between block A and the horizontal surface, determine (*a*) the velocity of block B after block A has moved 2 m. (*b*) the tension in the cable.

หา $v_{B,2}$, T

Answer (a) $v_B = 1.510$ m/s←. (b) $F = 96.0$ N.

พิจารณาการเคลื่อนที่ เมื่อ block A เคลื่อนที่ไปทางซ้าย เป็นระยะ 2 m



พิจารณาการเคลื่อนที่ของ Block A, B ไปพร้อมกัน

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

$$T_1 = [T_1]_A + [T_1]_B$$

$$= \tfrac{1}{2} m_A v_{A,1}^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_{B,1}^2 \quad (v_{A,1}^2 = 0,\ v_{B,1}^2 = 0)$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = [T_2]_A + [T_2]_B$$

$$= \tfrac{1}{2} m_A v_{A,2}^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_{B,2}^2 \quad ; \ v_{A,2} = v_A \ , \ v_{B,2} = v_B$$

$$= \tfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_B^2$$

สมการความยาวเชือก

$$L = x_A + 3y_B + \text{constant} \Rightarrow x_A = -3y_B \Rightarrow \Delta x_A = 3\Delta y_B$$

$$0 = v_A + 3v_B \Rightarrow |v_A| = |-3v_B| \Rightarrow v_A = 3v_B$$

ถ้า $\Delta x_A = 2$, $\Delta y_B = \frac{2}{3}$

$$T_2 = \tfrac{1}{2} \times 30 \times [3v_B]^2 + \tfrac{1}{2} \times 25 \times [v_B]^2 = 147.5\, v_B^2$$

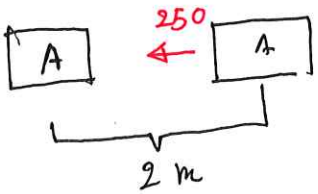
งาน $U_{1\to2} = [U_{1\to2}]_A + [U_{1\to2}]_B$ (งานจากแรงลัพธ์ + งานจากน้ำหนัก)

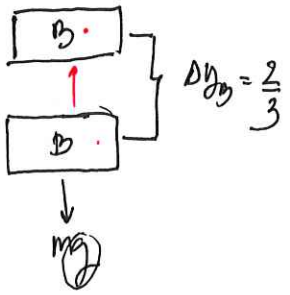
$= +250 \times 2 - m_B g\left[\frac{2}{3}\right]$

$= 500 - 25 \times 9.81 \times \frac{2}{3}$

$= 500 - 163.5$

$\Rightarrow U_{1\to2} = 336.5$ J





จาก $T_1 + U_{1\to2} = T_2$

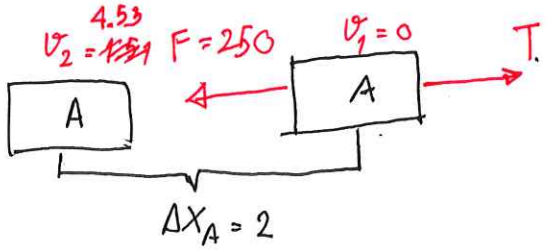
$0 + 336.5 = 147.5 v_B^2$

$v_B = \underline{1.51}$ m/s *

$v_A = 3v_B = 3 \times 1.51 = 4.53$

หา Tension (T)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของ Block A



$T_1 + U_{1\to2} = T_2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} \times 30 \times 4.53^2$

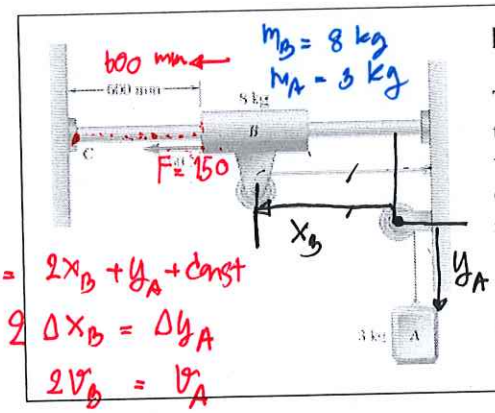
$T_2 = 307.81$ J

$U_{1\to2} = 250 \times 2 - T \times 2$

$= 500 - 2T$

$0 + 500 - 2T = 307.81$

$T = \underline{96.095}$ N *



PROBLEM 13.20

The system shown is at rest when a constant 150-N force is applied to collar B. (*a*) If the force acts through the entire motion, determine the speed of collar B as it strikes the support at C. (*b*) After what distance d should the 150-N force be removed if the collar is to reach support C' with zero velocity?

Answer (a) $v_B = 2.34$ m/s←. (b) $d = 235$ mm.

$L = 2x_B + y_A + \text{const}$

$2\Delta x_B = \Delta y_A$

$2v_B = v_A$

$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$

a). แรง 150 N กระทำ ตลอด การเคลื่อนที่

พิจารณา การเคลื่อนที่ ของ collar B และ Block A ไปพร้อมกัน

$T_1 = [T_1]_B + [T_1]_A = 0$ (เริ่มต้นจากหยุดนิ่ง)

$T_2 = [T_2]_B + [T_2]_A$

$= \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 \quad ; v_A = 2v_B$

$= \frac{1}{2} \times 8 \cdot v_B^2 + \frac{1}{2} \times 3 \times (2v_B)^2$

$T_2 = 10 v_B^2$

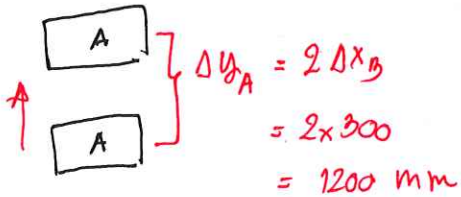
หา $U_{1\to 2}$

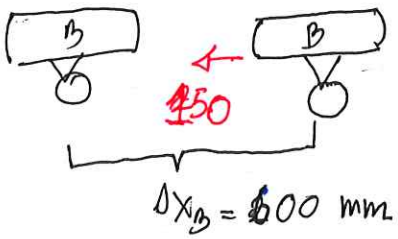
$U_{1\to 2} = [U_{1\to 2}]_A + [U_{1\to 2}]_B$

$= -mg[1.2] + 150 \times 0.6$

$= -3 \times 9.81 \times 1.2 + 90$

$= 54.684$





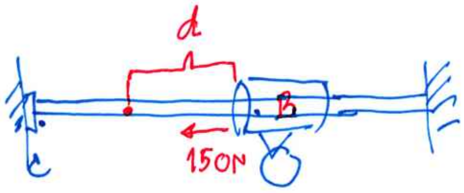
หา $T_1 + U_{1\to 2} = T_2$

$0 + 54.684 = 10 v_B^2$

$v_B = 2.34$ m/s

b). เอาแรง 150N ออกที่ระยะ d เพื่อที่ให้ $v_B = 0$ (เมื่อเคลื่อนที่ถึง Support)

$v_{B,2} = 0$



$T_1 = 0$

$T_2 = [T_2]_B + [T_2]_A =$

$= \frac{1}{2} m_B v_{B,2}^2 + \frac{1}{2} m_A v_{A,2}^2 = 0$ (with $v_{B,2}^2 = 0$, $v_{A,2}^2 = 0$)

$U_{1\to2} = [U_{1\to2}]_B + [U_{1\to2}]_A$

$= 150d \quad - m_A g [1.2]$

$= 150d \quad - 3 \times 9.81 \times 1.2$

$= 150d \quad - 35.316$

$T_1 + U_{1\to2} = T_2$

$0 + 150d - 35.316 = 0$

$d = \underline{0.235}$ m #